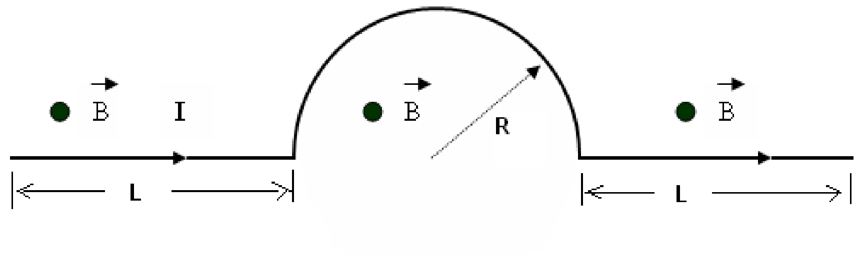
OPOSICIÓN COMUNIDAD VALENCIANA 2008

2.- Por un hilo de alambre con la forma que se indica en la figura pasa una intensidad de corriente I y actúa un campo magnético de intensidad B con sentido saliendo del papel. Calcular el valor de la fuerza sobre el alambre conductor.



- - - - -

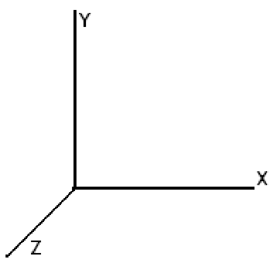
El alambre lo podemos dividir en tres tramos: el primero rectilíneo de longitud L, el segundo una semicircunferencia de radio R, y el tercero nuevamente rectilíneo de longitud L. Entonces la fuerza total será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

La primera fuerza la calcularemos aplicando la ecuación de Laplace que nos permite calcular la fuerza que actúa sobre un conductor rectilíneo de longitud L por el que circula una corriente I y que se encuentra dentro de un campo magnético:

$$\vec{F}_1 = I\left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right)$$

Para definir las coordenadas de los vectores hemos de elegir un sistema de referencia. Utilizaremos coordenadas cartesianas:

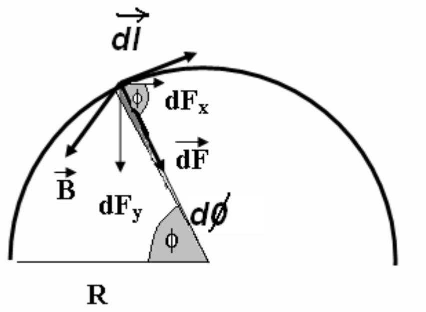


El vector longitud, $\vec{\ell}$, tiene el sentido y dirección de la corriente I y su módulo es L: $\vec{\ell} = L\,\vec{i}$ El vector campo magnético está dirigido hacia nosotros: $\vec{B} = B\,\vec{k}$. Al realizar el producto vectorial:

$$\vec{F}_1 = I\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -I\,L\,B\,\vec{j}$$

Por la simetría del problema es fácil comprobar que $\vec{F}_3 = -I\,L\,B\,\vec{j}$

Para hallar la fuerza, $\vec{F}_2$ sobre la semicircunferencia calcularemos la suma de todos los elementos diferenciales $d\vec{F}$ pero hemos de observar que su dirección cambia continuamente en cada elemento diferencial de longitud. Hallaremos la fuerza sobre un elemento diferencial de longitud situado en el ángulo ϕ y luego integraremos para todo el cable, desde 0 hasta π.



$$d\vec{F} = I\left(d\vec{l} \times \vec{B}\right) = I\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = I\,B\,dy\,\vec{i} - I\,B\,dx\,\vec{j} = \left(dF_x, dF_y, 0\right)$$

Además, el módulo es:

$$\left|d\vec{F}\right| = dF = I\,dl\,B\,sen\,90 = I\,dl\,B$$

$d\vec{F}$ está situada en el plano XY y su sentido estará dirigido hacia el centro de la circunferencia. Es evidente pues es el resultado del producto vectorial de $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ y por tanto ha de ser perpendicular a estos dos vectores, y el sentido nos lo ha determinado la resolución del producto vectorial. Calcularemos la fuerza en cada uno de los ejes.

Eje X:

$$dF_x = dF\cos\phi = I\,dl\,B\cos\phi = I\,R\,d\phi\,B\,\cos\phi$$

$$F_x = \int_0^{\pi} I\,B\,R\cos\phi\,d\phi = I\,B\,R\left(sen\,\pi - sen\,0\right) = 0$$

Eje Y:

$$dF_y = dF\ sen\,\phi = I\ dl\ B\ sen\,\phi = I\ R\ d\phi\ B\ \ sen\,\phi$$

$$F_y = \int_0^{\pi} IBRsen\phi = -IBR\left(\cos\pi - \cos 0\right) = 2IRB$$

Respecto al sentido de esta fuerza observamos en el dibujo que es hacia abajo (ya lo habíamos deducido no obstante al realizar el producto vectorial). Así:

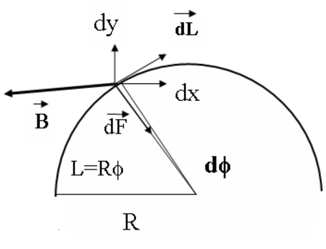
$$\vec{F}_2 = \left(0,-2IRB,0\right) = -2IRB\,\vec{j}$$

Ahora sí:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -IlB\,\vec{j} - 2IRB\,\vec{j} - IlB\,\vec{j} = -2\,I\,B\left(l + R\right)\vec{j}$$

Qué es el valor de la fuerza que nos pedían calcular.

Otra forma de resolver el problema es calcular $\vec{F}_2$ como resultado de una integral a lo largo del camino que sigue la intensidad. Es decir:



$$\vec{F}_2 = \int_C d\vec{F} = \int_C I\left(d\vec{L}\times\vec{B}\right) = \int_C\left(B\,dy\,\vec{i} - B\,dx\,\vec{j}\right) = I\,B\int_C dy\,\vec{i} - I\,B\int_C dx\,\vec{j}$$

$$\int_c dy = \int_c dL\ \cos\phi = \int_0^{\pi} R\cos\phi\,d\phi = R\,sen\,\phi\Big|_0^{\pi} = R\left(sen\,\pi - sen\,0\right) = 0$$

$$\int_c dx = \int_c dL\,sen\,\phi = \int_0^{\pi} R\,sen\,\phi\,d\phi = -\,R\cos\phi\Big|_0^{\pi} = -R\left(\cos\pi - \cos 0\right) = 2R$$

Y obtenemos el mismo resultado que con el proceso anterior.